L'ockhamisme de Prior et l'ockhamisme actualiste en logique temporelle

Olivier Roy
royo@uqtr.ca

3 mai 2004

Résumé

Pour interpréter les énoncés au futur dans un contexte indéterministe, Arthur Prior a proposé une approche qui, selon lui, est ockhamiste. Or, depuis environ dix ans, Peter Øhstrøm et Per V. Hasle ont fréquemment soutenu que l'approche actualiste représente mieux que celle de Prior les positions de Guillaume d'Ockham sur la logique temporelle. Dans cette présentation, je montre que la formalisation habituelle de l'actualisme n'est pas ockhamiste dans le sens où l'entendait Prior et j'explore des voies de réconciliation.

1 Introduction

En logique temporelle contemporaine, il existe au moins trois approches pour interpréter les phrases au futur qui portent sur des faits contingents. La plus populaire est probablement celle proposée par Arthur Prior dans *Past, Present and Future* [Pri67, p. 126-127]. Une phrase de la forme « il sera le cas que p » y est vraie à un moment et *dans un cours possible de l'histoire* seulement si p est vraie dans un moment postérieur *dans ce même cours possible de l'histoire*. Prior a remarqué que, selon cette interprétation, le principe suivant est invalidé : « s'il fut le cas qu'il sera le cas que A alors il est établi qu'il fut le cas qu'il sera le cas que A », qui donne, en symboles [1] :

$$PFA \rightarrow \Box PFA \qquad (\textit{Nécessité du Passé})$$

Selon Prior[Pri67, p. 121], Guillaume d'Ockham [d'O83, p. 38] a lui aussi rejeté la validité de la *Nécessité du Passé*. Pour cette raison, il a qualifié sont interprétation d'ockhamiste. [2]

[1] A est une variable métalinguistique désignant n'importe quelle formule bien formée du langage.

[2] Dans la suite, j'utiliserai « interprétation de Prior-Thomason » pour me référer à l'interprétation ockhamiste de Prior.

Peter Øhstrøm et Per V. Hasle ont plusieurs fois[3] avancé qu'une interprétation *actualiste* représente plus adéquatement que l'interprétation de Prior-Thomason les positions d'Ockham en logique temporelle. Selon cette interprétation, une phrase une phrase de la forme « il sera le cas que p » est vraie à un moment seulement si p est vraie à un moment *dans le futur actuel*.

Je montre, dans ce texte, que le modèle actualiste ne permet pas d'invalider la *Nécessité du Passé*. Nous verrons, de plus, que l'approche la plus simple pour construire une formule sémantiquement équivalente à la *Nécessité du Passé* dans le langage actualiste consiste à l'enrichir d'un nouveau connecteur modal primitif jouant le rôle du complexe $\Box PFA$.

2 Les deux interprétations ockhamistes

L'interprétation ockhamiste de Prior-Thomason et l'interprétation actualiste apportent une solution au problème des énoncés au futur à propos de faits contingents. Quel est le problème ? Supposons que je m'apprête à faire un tir « à pile ou face », et que la chute de la pièce soit un authentique processus aléatoire. Avant le lancé de la pièce, si j'affirme « la pièce tombera vers le bas », on peut supposer que cet énoncé est vrai. Qu'en est-il si j'affirme « la pièce tombera sur pile » ? Avant le lancé, cette prédiction est-elle vraie, fausse ou ni vraie ni fausse ? La difficulté de cette question tient au fait que la pièce ne tombera pas nécessairement sur pile. Ce résultat, s'il advient, est contingent plutôt que nécessaire.

Les deux formes d'ockhamisme solutionnent le problème en relativisant la vérité des énoncés non seulement au moment d'énonciation mais également à un cours possible de l'histoire à ce moment. Par « cours possible de l'histoire à un moment » j'entends une suite d'événements qui peuvent succéder à ce moment. Dans l'exemple du tir à pile ou face, il y a deux cours possibles de l'histoire ; dans l'un d'eux la pièce tombe sur pile et dans l'autre la pièce tombe sur face.

La stratégie ockhamiste consiste donc à choisir un cours possible de l'histoire et à évaluer la prédiction dans ce cours. Ainsi, l'énoncé « la pièce tombera sur pile » est vrai au moment de la prédiction selon le cours possible de l'histoire où la pièce tombe sur pile et il est faux selon le cours possible de l'histoire où la pièce tombe sur face. Comme choisir le cours de l'histoire dans lequel la vérité des prédictions sera évaluée ? C'est sur ce point que divergent les deux formes d'ockhamisme.

Pour les actualistes, un des cours possibles de l'histoire est le cours *actuel*, et c'est selon ce cours qu'il faut évaluer les prédictions. Ici « cours actuel » signifie « la suite d'événement qui aura effectivement lieu ». L'idée étant qu'un des cours possibles de l'histoire sera réalisé ; même si le résultat du tir à pile ou face n'est pas déterminé, un chose est certaine, il y aura un résultat. Le cours possible de l'histoire qui contient ce résultat est le cours actuel de l'histoire. Le futur actuel est donc ce qui, dans les faits, aura lieu dans le futur.

[3] [ØH95], [Øhs81], [ØHB98]

Pour les philosophes adoptant l'interprétation de Prior-Thomason, il ne peut y avoir de cours actuel de l'histoire aux moments indéterministes. Ils font valoir qu'avant l'achèvement d'un processus aléatoire, il n'y a rien qui puisse déterminer un des résultats comme étant celui qui sera effectivement réalisé, et ce, justement parce que ce processus est indéterministe. Pour eux, le choix d'un cours possible de l'histoire est « *prima facie* » [Pri67, p. 121], c'est un « postulat provisoire » [Tho84, p. 145] en attendant de voir ce que le futur nous réserve.

Cette caractérisation très sommaire des thèses philosophiques propres aux deux ockhamismes se résume ainsi[4]. Toutes deux endossent l'idée que la vérité des prédictions est relative à un cours possible de l'histoire : le cours actuel pour les uns et un cours choisit provisoirement pour les autres. Examinons maintenant comment ces thèses sont formalisées.

3 L'interprétation Ockhamiste de Prior-Thomason

3.1 Le langage formel L_{OPT}

Alphabet de L_{OPT} :

1. Des variables propositionnelles : p, q, r, ...
2. Les connecteurs de vérité classiques : $\rightarrow$ (l'implication matérielle) et $\neg$ (la négation)
3. Les connecteurs temporels et modaux : P (il fut le cas), F (il sera le cas) et $\Box$ (il est établi que)

Règles de formation :

1. Les variables propositionnelles sont des formules bien formées (fbf) ;
2. Si A et B sont des fbfs alors $A \rightarrow B$, $\neg A$, PA , FA et $\Box A$ sont des fbfs.
3. Rien d'autre n'est une fbf.

Abréviations :

1. On suppose les règles classiques pour former le « et » ($\wedge$), le « ou » ($\vee$) et le « si et seulement si » ($\leftrightarrow$).
2. Pour les connecteurs temporels : $Gp \equiv_{df} \neg F \neg p$; $Hp \equiv_{df} \neg P \neg p$; $\Diamond p \equiv_{df} \neg \Box \neg p$.
   « Gp », « Hp » et « $\Diamond$p » signifient respectivement « il sera toujours le cas que », « il fut toujours le cas que » et « il est possible que ».

Il s'agit du langage formel habituel pour exprimer à la fois des notions temporelles et modales. On attribue généralement sa première formulation à Prior ([Pri57] et [Pri67]), quoiqu'il utilisait une notation différente. La portion « propositionnelle » de ce langage est classique, j'utilise celle de Joffrey Hunter [Hun96]. La portion temporelle provient de John Burgess [Bur84] et la portion modale de Richmond Thomason [Tho84]. Ce langage ne contient ni variable

[4] Pour une exposition plus complète, voir [BPX01, chap. 6]

ni constante individuelle ni propriété ni quantificateur ; il s'agit d'une logique *propositionnelle* temporelle.

3.2 La structure d'interprétation de Prior-Thomason

La structure d'interprétation de Prior-Thomason est un ensemble arborescent de moments. C'est une paire $\langle \mathcal{T}, < \rangle$ où $\mathcal{T}$ est un ensemble dont les éléments sont interprétés comme des moments et $<$ est une relation binaire transitive, asymétrique et irréflexive sur $\mathcal{T}$ qu'on interprète comme la relation « antérieur à ». Les moments sont conçus comme des états instantanés complets du monde. Ils « contiennent » tout l'univers à un instant. J'utiliserai, pour désigner les moments, m, m_0, m_1 et ainsi de suite.

Une suite maximale dans $\mathcal{T}$ est nommée une histoire. Une suite est maximale si elle n'est sous-ensemble d'aucune suite plus grande. Chaque histoire représente un cours possible complet du monde. Je les désignerai en utilisant h, h_0, h_1, etc.. L'ensemble des histoires dans $\mathcal{T}$ sera noté $\mathrm{H}(\mathcal{T})$. L'ensemble des histoires qui contiennent le moment m sera quant à lui noté H_m. H_m est l'ensemble des cours possibles de l'histoire à m.

Pour donner à la structure $\langle\ \mathcal{T},\ <\ \rangle$ la forme d'un arbre, on fait le postulat suivant :

$$(m_1 < m_3 \land m_2 < m_3) \rightarrow (m_1 < m_2 \lor m_2 < m_1 \lor m_1 = m_2) \quad (\textit{Arborescence})$$

Arborescence interdit que deux branches distinctes puissent se rejoindre. Pour s'assurer que notre arbre a un « tronc » unique, on postule que tous les moments ont un ancêtre commun.

$$\forall m_1 \forall m_2 \exists m_0 [m_0 \leqslant m_1 \lor m_0 \leqslant m_2] \qquad (\textit{Connection historique})$$

3.3 Règles d'interprétation de L_{OPT}

Un modèle $\mathfrak{M}$ est une structure à laquelle on ajoute une fonction d'interprétation $\mathcal{V}$ qui assigne aux constantes propositionnelles du langage un sous-ensemble de $\mathcal{T} \times \mathrm{H}(\mathcal{T})$. Cette fonction servira à spécifier les conditions de vérité des formules de L_{OPT} ; l'idée étant que les propositions atomiques sont vraies dans des paires (moments, histoires). La contrainte suivante s'applique à $\mathcal{V}$.

$$(m,h) \in \mathcal{V}(p) \rightarrow \forall h' \in H_m (m,h') \in \mathcal{V}(p) \qquad (\textit{Indépendance Historique})$$

Indépendance Historique sert à garantir que la vérité des propositions atomiques est établie à chaque moment [5].

On définit récursivement les conditions de vérité pour toutes les formules de L_{OPT}.

1. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models$ A ssi (m, h) $\in \mathcal{V}$(A)
2. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models \neg$A ssi (m, h) $\notin \mathcal{V}$(A)

[5] La formulation que j'utilise provient de Zanardo [Zan96, p. 5].

3. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models$ A $\rightarrow$ B ssi (m, h) $\in$ ($\mathcal{V}$ ($\neg$A) $\cup$ $\mathcal{V}$(B))
4. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models$ PA ssi $\exists m_1[m_1 \in \mathcal{T} \wedge m_1 <$ m $\wedge$ $(m_1$, h) $\in \mathcal{V}$(A)]
5. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models$ FA ssi $\exists m_1[m_1 \in \mathcal{T} \wedge$ m $< m_1 \wedge (m_1$, h) $\in \mathcal{V}$(A)]
6. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models$ $\Box$A ssi $\forall$ $h_1[h_1 \in$ H$_m$ $\rightarrow$(m, h_1) $\in \mathcal{V}$(A)]

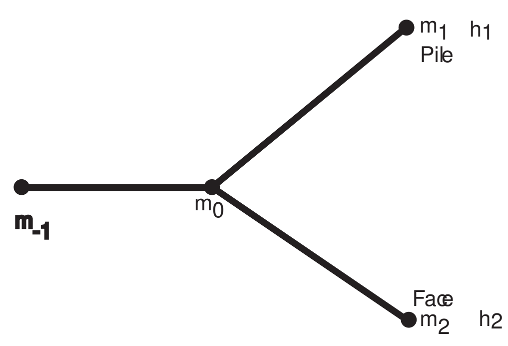
Les règles d'interprétations pour les connecteurs de vérité sont classiques. Une formule est vraie dans un modèle $\mathfrak{M}$ et dans une paire (moment, histoire) seulement si cette paire fait partie de l'ensemble des paires assignées à cette formule par la fonction $\mathcal{V}$. La négation d'une formule est vraie seulement si la paire (m, h) ne fait pas partie de $\mathcal{V}(A)$ et une implication est vraie seulement si (m, h) ne fait pas partie de la valeur de A ou si elle fait partie de la valeur de B.

Une formule au passé (PA) est vraie dans une paire (m, h) seulement si A est vraie dans un moment antérieur à m dans l'histoire h. La condition (6) définie une forme de nécessité historique. Une formule de la forme $\Box$A signifie « il est établi que A » et est vraie dans une paire (m, h) seulement si A est vraie dans tous les cours de l'histoire possibles à m. Sous la contrainte *Indépendance Historique*, on a que $\mathfrak{M} \models p \rightarrow \Box p$: si une proposition atomique p est vraie alors il est établi que p est le cas.

C'est dans (5) que se cristallise l'interprétation de Prior-Thomason des énoncés au futur. Selon cette condition, une formule de la forme « il sera le cas que A » (FA) est vraie dans une paire (m, h) seulement si A est vraie dans un moment postérieur à m *dans l'histoire h*. Comme on pouvait s'y attendre, aucune contrainte n'est imposée par les règles d'interprétation dans le choix d'une histoire d'évaluation. Examinons le comportement de cette interprétation dans le cas du tir à pile ou face.

3.4 Formalisation de l'exemple du tir

Nous n'avons besoin que de trois moments dans notre structure : $\mathcal{T} = \{m_0, m_1, m_2\}$. À m_0 le tir est sur le point d'être effectué, à m_1 la pièce tombe sur pile et à m_2 elle tombe sur face. Il y a par conséquent deux histoires dans notre structure : h_1 contenant m_0 et m_1 et h_2 contenant m_0 et m_2.

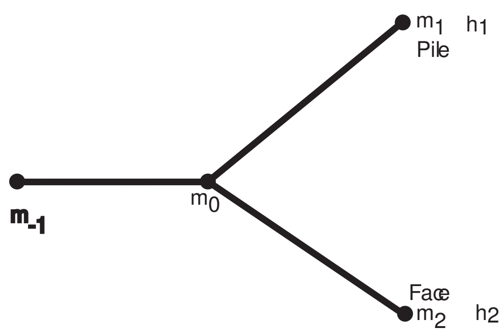


Soit p la proposition « la pièce tombe sur pile ». On aura $\mathcal{V}(p) = \{(m_1, h_1)\}$[6]. Ainsi, au moment m_0, la formule Fp est vraie selon le cours possible de l'histoire h_1 mais elle est fausse selon le cours possible h_2.

3.5 ***Nécessité du Passé*** dans L$_{OPT}$

Prior a qualifié son interprétation d'ockhamiste parce qu'elle falsifie un principe qui était également rejeté par Guillaume d'Ockham. Ockham a en effet contesté l'incompatibilité de l'omniscience divine avec la liberté humaine en rejetant le principe « s'il fut le cas que A alors il est établi qu'il fut le cas que A » (PA $\rightarrow \Box$PA). Il a soutenu que ce principe doit être falsifié lorsque A est une phrase au futur à propos de faits contingents dont l'évaluation nous amène à un moment postérieur au moment d'énonciation de PA $\rightarrow \Box$PA.

Cette formule est effectivement falsifiable dans l'interprétation ockhamiste de Prior-Thomason. Pour lui construire un contre-exemple, il suffit d'ajouter un moment m_{-1} antérieur à m_0 dans le modèle que j'ai utilisé pour formaliser l'exemple du tir à pile ou face.



On aura alors :

$\mathcal{V}(p) = \{(m_1, h_1)\}$	Supposition
$\mathcal{V}(Fp) = \{(m_{-1}, h_1), (m_0, h_1)\}$	Par conditions de vérité (CV) de F
$\mathcal{V}(PFp) = \{(m_0, h_1), (m_1, h_1)\}$	Par CV de P
$\mathcal{V}(\Box PFp) = \{(m_1, h_1)\}$	Par CV de $\Box$
$\mathcal{V}(PFp \wedge \neg\Box PFp) = \{(m_0, h_1)\}$	Par CV de $\neg$ et $\wedge$

Remarquons cependant que (PA $\rightarrow \Box$PA) est valide lorsque A ne déplace pas le moment d'évaluation après le moment d'énonciation, principalement en raison de *Indépendance Historique*. Examinons maintenant l'interprétation actualiste.

[6]Remarquons que la condition *Indépendance Historique* est satisfaite dans cette structure simplement parce que h_1 est la seule histoire qui contient m_1

4 L'interprétation actualiste

Comme je l'ai mentionné en introduction, Peter Øhstrøm et Per V. Hasle ont plusieurs fois avancé que l'interprétation actualiste représente plus adéquatement que l'interprétation de Prior-Thomason les positions d'Ockham en logique temporelle. Nous verrons dans cette section que l'actualisme n'est pas ockhamiste au sens où l'entendait Prior.

Il existe plusieurs formalisations de l'actualisme. J'utilise la structure proposée par Nuel Belnap et Mitchell Green [NB94] et le langage formel proposé par Bruno Barcellan et Alberto Zanardo [BZ99]. La différence principale entre la structure actualiste et celle de Prior-Thomason est la présence d'une fonction actualisante qui donne pour chaque moment de $\mathcal{T}$ le cours actuel de l'histoire à ce moment. Cette différence se répercute bien entendu sur la syntaxe et l'interprétation du langage actualiste.

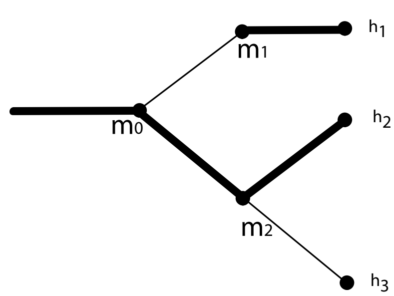
4.1 La structure d'interprétation actualiste

La structure d'interprétation actualiste est un triplet $\langle \mathcal{T}, <, \mathcal{A} \rangle$ où $\mathcal{T}$ et $<$ sont comme dans la structure de Prior-Thomason. $\mathcal{A}$ est une fonction qui assigne à chaque moment m de $\mathcal{T}$ une histoire dans H_m. $\mathcal{A}(m)$ nous donne donc l'histoire actuelle au moment m. Les contraintes suivantes s'appliquent sur $\mathcal{A}$.

$$\forall m[m \in \mathcal{T} \rightarrow m \in \mathcal{A}(m)] \qquad (\textit{Inclusion})$$

$$\forall m_0 m_1[(m_0, m_1 \in \mathcal{T} \wedge m_0 < m_1 \wedge m_1 \in \mathcal{A}(m_0)) \rightarrow \mathcal{A}(m_1) = \mathcal{A}(m_0)] \qquad (\textit{Cohérence})$$

Inclusion garantit que $\mathcal{A}$(m) fait partie de H_m. *Cohérence* nous assure une continuité dans les histoires actuelles. Sous ces deux conditions, on peut représenter une structure arborescente actualiste comme dans la figure ci-dessous, où les histoires actuelles sont en gras.



4.2 Le langage formel L_{OA}

Alphabet de L_{OA} :

1. Comme L_{OPT} sauf :
2. Nouveaux connecteurs temporels et modaux qui remplacent F et G : f (il sera le cas), $\Box_F$ (il est établi qu'il sera le cas que) et $\Box_G$ (il est établi qu'il sera toujours le cas que).

Règles de formation :

1. Comme L_{OPT} sauf :
2. Si A est une fbf alors fA, $\Box_F$A et $\Box_G$A sont des fbfs.

Abréviations :

1. Comme L_{OPT} sauf :
2. $g\mathrm{A} \equiv_{df} \neg f \neg \mathrm{A}$; $\Diamond_F A \equiv_{df} \neg\Box_G\neg\mathrm{A}$; $\Diamond_G A \equiv_{df} \neg\Box_F\neg\mathrm{A}$.

Le connecteur f signifie « il sera le cas que ... dans le cours actuel de l'histoire ». Les deux connecteurs modaux, $\Box_F$ et $\Box_G$, sont introduit parce que $\Box f$ ne se comporte pas comme la combinaison $\Box F$ dans l'interprétation de Prior-Thomason. Je dois exposer l'interprétation de L_{OA} pour expliquer cette complication.

4.3 Règles d'interprétation de L_{OA}

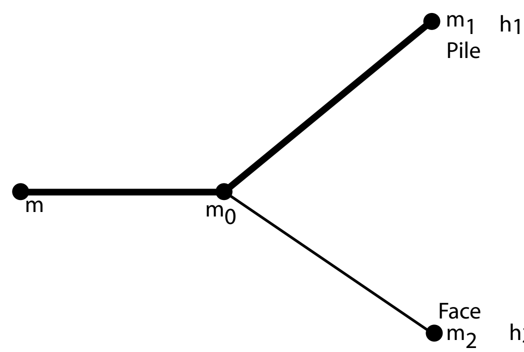
La fonction d'interprétation $\mathcal{V}$ se comporte comme dans l'interprétation de Prior-Thomason. Les règles pour les connecteurs de vérité restent inchangées. Les règles d'interprétation pour les connecteurs temporels et modaux sont les suivantes.

1. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models f$A ssi $\exists m_1[m_1 \in \mathcal{A}(m) \wedge \mathrm{m} < m_1 \wedge (m_1, \mathrm{h}) \in \mathcal{V}(\mathrm{A})]$
2. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models \Box_F$A ssi $\forall h_1\ \exists m_1[(h_1 \in \mathrm{H}_m \wedge \mathrm{m} < m_1 \wedge m_1 \in h_1 \rightarrow (m_1, h_1) \in \mathcal{V}(\mathrm{A})]$
3. $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models \Box_G$A ssi $\forall h_1\ \forall m_1[(h_1 \in \mathrm{H}_m \wedge \mathrm{m} < m_1 \wedge m_1 \in h_1 \rightarrow (m_1, h_1) \in \mathcal{V}(\mathrm{A})]$

Reprenons l'exemple du tir pour examiner le comportement de ces connecteurs,

4.4 Formalisation actualiste de l'exemple du tir

Reprenons la structure utilisée plus tôt en y ajoutant $\mathcal{A}$. Supposons que l'histoire actuelle est celle où la pièce tombe sur pile. On aura $\mathcal{A}(m_{-1}) = \mathcal{A}(m_0) = \mathcal{A}(m_1) = h_1$ et $\mathcal{A}(m_2) = h_2$.



Gardons p comme « la pièce tombe sur pile ». Comme je l'ai mentionné il y a quelques instants, le connecteur f nous transporte le long de l'histoire actuelle au moment d'évaluation. On a donc $\mathfrak{M}$, $(m_0, h_1) \models fp$ mais, contrairement au F du modèle de Prior-Thomason, on a aussi $\mathfrak{M}$, $(m_0, h_2) \models fp$: la formule fp est vraie dans toutes les histoires de H_m. On a donc $fp \to \Box fp$ parce que la règle d'interprétation (1) de f ne tient pas compte de l'histoire d'évaluation de fp. Elle nous ramène toujours à l'histoire actuelle $\mathcal{A}(m)$.

En fait, on peut monter la validité de $fA \leftrightarrow \Box fA$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models \neg\Box fA$. Il faut donc qu'il existe un $h_1 \in H_m$ tel que $\mathfrak{M}$, (m, h_1) $\models \neg fA$. Par la règle d'interprétation pour f, ceci revient à dire qu'il n'existe pas de m_1 dans $\mathcal{A}(m)$ et postérieur à m tel que (m_1, A(m)) $\mathfrak{M} \models A$. Ceci contredit directement la vérité de $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models fA$.

$\Longleftarrow$ Si $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models \Box fA$ alors on a $\mathfrak{M}$, (m,h_1) $\models fA$ pour toute h_1 dans H_m. Mais $\mathcal{A}(m) \in H_m$ par *Cohérence*. Par conséquent, $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models fA$. $\Box$

Cette équivalence montre pourquoi il faut introduire les connecteurs $\Box_F$ et $\Box_G$ comme primitif. Dans l'interprétation de Prior-Thomason, $\Box \mathrm{F}A$ ne peut être vraie à un moment sans que $\mathrm{F}A$ ne soit vraie dans toutes les histoires qui contiennent ce moment. Or, pour que $\Box fA$ soit vraie dans l'interprétation actualiste, il suffit que A soit vraie dans l'histoire actuelle. Le connecteur $\Box_F$ sert donc à retrouver la signification de la combinaison $\Box \mathrm{F}A$: une formule $\Box_F A$ n'est vraie à un moment m que si A est vraie à un moment postérieur dans toutes les histoires de H_m[7]. Le connecteur $\Box_G$ est ajouté pour la même raison.

Pour résumer, on a les valeurs de vérité suivantes dans notre exemple[8] :

$\mathcal{V}(p) = \{(m_1, h_1)\}$	Supposition
$\mathcal{V}(fp) = \{(m_{-1}, h_1), (m_{-1}, h_2), (m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de f
$\mathcal{V}(\Box_F p) = \emptyset$	Par CV de $\Box_F$
$\mathcal{V}(\Box_G p) = \{(m_1, h_1)\}$	Pas CV de $\Box_G$

[7] Ce connecteur est en fait le F peircéen de Prior [Pri67, p. 132]

[8] $\Box_G p$ est trivialement satisfaite parce qu'il n'y a pas de moments après m_1

4.5 *Nécessité du Passé* dans L_{OA}

Si on transfert directement *Nécessité du Passé* dans le langage actualiste on obtient (PfA $\rightarrow \Box$ PfA). Or, à partir de la preuve de $fA \leftrightarrow \Box fA$, on peut facilement montrer que P$fA \rightarrow \Box$ PfA est aussi valide.

Démonstration. Supposons une paire (m, h) où PfA est vraie. Ceci signifie qu'il existe à un moment m_0 antérieur à m où fA est vrai. On sait qu'à m_0 $\Box fA$ est aussi vrai, ce qui signifie que pour toutes les histoires de H_{m_0}, fA est vrai. Comme m_0 est dans le passé de m, *Arborescence* nous garantit que $H_m \subseteq H_{m_0}$. Ceci suffit à garantir que pour toutes les histoires de H_m, PfA est vrai. □

Ainsi, directement transférée, la formule qui a poussé Prior à qualifier son modèle d'ockhamiste n'est plus invalidée dans l'interprétation actualiste. Ceci n'a rien de surprenant puisque le passage de l'interprétation priorienne à l'interprétation actualiste implique justement un changement dans les conditions de vérité du connecteur futur. Il est plus intéressant d'examiner s'il existe un autre complexe de formules, dans le langage actualiste, qui puisse jouer de rôle de $\Box PF$ dans *Nécessité du Passé*.

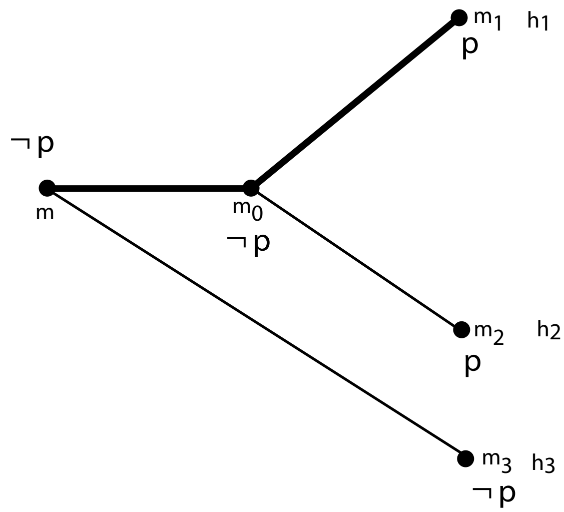
Si notre structure arborescente n'a pas de premier ni ne dernier moment, alors $\Box PF$ est équivalent à $\Box FP$ dans le langage priorien[9], et ce, parce chaque moment atteint par l'évaluation de $\Box PF$ peut aussi être être atteint par $\Box FP$. Or, cette dernière formule est exprimable dans le langage actualiste. Elle correspond à $\Box_F P$. Ainsi, on peut reformuler *Nécessité du Passé* comme suit :

$$PfA \rightarrow \Box_F PA \tag{1}$$

Mais il est clair que, $\Box PF$ et $\Box FP$ n'ont pas la même signification ; dire "il alla être le cas que p" ne semble pas être la même chose que de dire "il aura été le cas que p". Ainsi, même la vérité de (1) et de *Nécessité du Passé* vont la plupart du temps de pair, la première ne semble pas être une traduction très fidèle de la seconde.

Peut-on envisager une traduction plus adéquate du complexe $\Box FP$ dans le langage actualiste ? Le candidat le plus prometteur est sans doute $\Box P \Box_F$. Comme ce connecteur correspond au $\Box P \Box F$ de Prior-Thomason et que $\Box P \Box F$ et □PF ne sont pas sémantiquement équivalents, on peut en conclure que $\Box P \Box_F$ n'est pas la traduction voulue de □PF. Examinons un cas où □PFp est vraie mais où $\Box P \Box_F p$ est fausse.

[9]Dans une structure finie, cette équivalence tient pour autant qu'on reste éloigné des bornes. Le complexe $\Box PF$ devient équivalent à $\perp$ (la constante pour la fausseté) au premier et à $p \vee Pp$ au dernier moment.



Soit la structure comme dans la figure ci-dessus avec $\mathcal{V}(p)$ telle qu'indiquée. Dans l'interprétation de Prior-Thomason, on obtient :

$\mathcal{V}(p) = \{(m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Hypothèse
$\mathcal{V}(Fp) = \{(m, h_1), (m, h_2), (m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de F.
$\mathcal{V}(PFp) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2), (m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de P.
$\mathcal{V}(\Box PFp) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2), (m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de $\Box$.
$\mathcal{V}(\Box Fp) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de $\Box$.
$\mathcal{V}(P\Box Fp) = \{(m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de P.
$\mathcal{V}(\Box P\Box Fp) = \{(m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de $\Box$.
$\mathcal{V}(\neg\Box P\Box Fp \wedge \Box PFp) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de $\wedge$ and $\neg$.

Dans l'interprétation actualiste on a[10],

$\mathcal{V}(\Box_F p) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de $\Box_F$
$\mathcal{V}(P\Box_F p) = \{(m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de P
$\mathcal{V}(\Box P\Box_F p) = \{(m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de $\Box$

Ce contre-exemple montre que $\Box P\Box_F p$ n'a pas les mêmes conditions de vérité que $\Box PFp$.

Dans ce contexte, on peut choisir d'introduire un nouveau connecteur modal primitif au langage actualiste ($\Box_{PF}$) dont les conditions de vérité sont calquées sur celles de $\Box PF$.

[10] La règle pour le passé est la même dans les deux modèles.

– $\mathfrak{M}$, (m,h) $\models \Box_{PF}$A ssi $\forall h_1 \exists m_1 \exists m_2$ [h $\in H_m \wedge m_1 < m \wedge m_1 < m_2 \wedge$ $(m_1, h_1) \in \mathcal{V}(A)$]

Il est clair que ce connecteur sera redondant dans le langage actualiste, parce qu'on peut toujours trouver une formule ne le contenant pas mais qui lui est équivalente. Il permet cependant d'exprimer clairement une version actualiste de *Nécessité du Passé*.

$$PfA \rightarrow \Box_{PF} A \qquad \textit{(Nécessité du Passé Actualiste)}$$

Le modèle actualiste utilisé pour formaliser l'exemple du tir convient pour construire un contre-exemple à la validité de la *Nécessité du Passé Actualiste*.

$\mathcal{V}(fp) = \{(m_{-1}, h_1), (m_{-1}, h_2), (m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de f
$\mathcal{V}(Pfp) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2), (m_1, h_1), (m_2, h_2)\}$	Par CV de P
$\mathcal{V}(\Box_{PF} p) = \{(m_1, h_1)\}$	Par CV de $\Box_{PF}$
$\mathcal{V}(Pfp \wedge \neg\Box_{PF} p) = \{(m_0, h_1), (m_0, h_2)\}$	Par CV de $\neg$ et $\wedge$

Plus généralement, compte tenu des conditions de vérité de $\Box_{PF} p$, il est clair que pour n'importe quel modèle $\mathfrak{M}_{PT}$ de Prior-Thomason et n'importe quel modèle actualiste $\mathfrak{M}_A$: $\mathfrak{M}_A$, (m,h) $\models \Box_{PF}$A ssi $\mathfrak{M}_{PT}$(m,h) $\models$ $\Box$PFA, à condition de A ne contienne pas d'occurrence du connecteur actualiste *f*.

5 Conclusion

J'ai tenté ici de faire une mise au point sur l'appellation « ockhamiste » en logique temporelle contemporaine. J'ai montré que l'actualisme, dans sa formulation habituelle, n'est pas ockhamiste au sens où l'entendait Prior. La *Nécessité du Passé* est *valide* dans la logique temporelle actualiste, alors que, selon Prior, l'ockhamiste se caractérise par la falsification de ce principe. On peut enrichir le langage actualiste d'un nouveau connecteur modal qui permet d'exprimer une nouvelle version de *Nécessité du Passé* (*Nécessité du Passé Actualiste*). Bien entendu, cette mise au point n'exclu pas que l'actualisme soit ockhamiste pour d'autres raisons que celle de Prior.

6 Annexe

6.1 Le connecteur $\Box$ dans $\mathcal{L}_A$

Dans les sections précédentes, j'ai utilisé le connecteur $\Box$ dans le langage actualiste. Ceci a permit de clarifier la présentation, mais j'aurais pu procéder sans lui. Une courte induction montre en effet que $\Box$ est superflu dans $\mathcal{L}_A$

Définissons le *degré modal*, $\mid \alpha \mid$, d'une formule α comme suit : si α est une proposition atomique, alors $\mid \alpha \mid = 0$; si α est de degré modal n et β de degré modal m alors $\mid \neg\alpha \mid = n$, $\mid \alpha \vee \beta \mid = Max(n, m)$ et $\mid O\alpha \mid = n + 1$ pour O n'importe quel connecteur dans $\{f, \Box_F, \Box_G\}$.

$\Box$ **est superflu dans $\mathcal{L}_A$.** *Pour n'importe quelle formule de la forme $\Box\varphi$ dans $\mathcal{L}_A$ il existe une formule γ dans $\mathcal{L}_A$ où $\Box$ n'apparaît pas telle que $\mathfrak{M},(m,h) \models \Box\varphi$ ssi $\mathfrak{M},(m,h) \models \gamma$*

Démonstration. L'induction est sur le degré modal de φ.

Case de base. ($| \varphi | = 0$) La formule φ alors une proposition atomique ou un complexe de propositions atomiques et de connecteur de vérité. Par *Indépendance Historique* nous savons que $\mathfrak{M},(m,h) \models \Box\varphi$ ssi $\mathfrak{M},(m,h) \models \varphi$.

Induction Notre hypothèse inductive est que le théorème est prouvé pour $| \varphi | =$ n. Nous devons vérifier qu'il tient encore pour $| \varphi | =$ n + 1. Nous devons vérifier pour quatre cas.

Cas 1. $\varphi =$ Pξ. Par l'hypothèse inductive, on sait qu'il existe une formule ξ équivalente à $\Box\xi$ à un moment m_0. Par *Arborescence*, on sait également que $H_m \subseteq H_{m_0}$ pour tous les moments m postérieurs à m_0. Ainsi, $P\xi$ est équivalent à $\Box P\xi$ pour tout ces moments.

Cas 2. $\varphi =$ fξ. Prouvé avant.

Les cas pour $\Box_F$ et $\Box_G$ sont évidents. $\Box$

6.2 Expressivité de $\mathcal{L}_A$

Validité de $\Box_{PF}\varphi \leftrightarrow \Box_F P\varphi$ dans un arbre infini. *Dans une structure actualiste $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{T}, <, \mathcal{A}\rangle$, où $\mathcal{T}$ n'a ni premier ni dernier élément, $\mathfrak{M} \models \Box_{PF}\varphi \leftrightarrow \Box_F P\varphi$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $m \models \Box_{PF}\varphi$ pour un moment m et une formule φ quelconques. Ceci signifie que, pour toutes les histoires de H_m, il existe un moment m_1 antérieur à m et un moment m_2 postérieur à m_1 tels que $m_2 \models \varphi$. Dans chacune de ces histoires, m_2 est soit postérieur, soit égal soit antérieur à m. Supposons que $m_2 < m$. Comme il n'y a pas de dernier moment dans $\mathcal{T}$, chaque histoire de H_m continue après m. Prenons n'importe quel moment dans $\{m' : m < m'\}$. Par *Arborescence*, on obtient $m' \models P\varphi$, ce qui implique que $m \models \Box_F P\varphi$. On arrive à la même conclusion par un argument similaire lorsque $m_2 = m$ ou $m_2 > m$.

$\Longleftarrow$ Nous n'avons qu'à répéter l'argument précédent en prenant $m \models \Box_F P\varphi$ comme point de départ. Cette fois, c'est l'absence de *premier* moment qui nous permet de trouver le moment nécessaire pour vérifier $\Box_{PF}\varphi$. $\Box$

Que dire, maintenant, des arbres finis ? Remarquons tout d'abord que le résultat tout juste prouvé s'y applique encore, pour autant qu'on reste loin du premier et du dernier moment. De là :

$\Box_{PF}$ **est exprimable dans $\mathcal{L}_A$.** *Pour n'importe quelle structure actualiste, $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{T}, <, \mathcal{A}\rangle$, il y a toujours une formule ψ de $\mathcal{L}_A$ telle que $\mathfrak{M} \models \Box_{PF}\varphi \leftrightarrow \psi$*

Démonstration. Les grandes lignes de la preuve : Le théorème précédent supporte l'équivalence partout sauf au premier et au dernier moment. Si $\Box_{PF}\varphi$ est vraie au dernier moment, alors φ doit être vraie à se moment ou dans le passé. Ainsi, au dernier moment, (m, h) $\models \Box_{PF}\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee P\varphi)$ pour m le dernier moment de l'histoire h. Au premier moment, $\mathcal{T}$, $\Box_{PF}\varphi$ est toujours fausse, ce qui nous donne l'équivalence triviale : (m_0, h) $\models \Box_{PF}\varphi \leftrightarrow \perp$ à m_0 le premier moment de $\mathcal{T}$ et pour toutes les histoires h. $\Box$

Références

[BPX01] Nuel Belnap, Michael Perloff, and Ming Xu. *Facing the Future : Agents and Choices in our Indeterministic World*. Oxford UP, Oxford, 2001.

[Bur84] John Burgess. Basic tense logic. *Handbook of Philosophical Logic*, 2, 1984. réédition 2001.

[BZ99] Bruno Barcellan and Alberto Zanardo. Actual futures in piercean branching-time logic. 1999. texte téléchargé de : http ://www.illc.uva.nl/j50/contribs/zanardo/zanardo.pdf le 08/08/03.

[d'O83] Guillaume d'Ockham. *Predestination, God, Foreknowledge and Future Contingents*. Hackett Publishing Company, 1983. trad. Marilyn McCord Adams et Norman Kretzmann.

[Hun96] J. Hunter. *Metalogic : An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. University of California Press, 1996.

[NB94] Green M. N. Belnap. Indeterminism and the thin red line. *Philosophical Perspectives*, 8, 1994.

[ØH95] P. Øhstrøm and Per F. V. Hasle. *Temporal Logic : From Ancients Ideas to Artificial Intelligence*. Kluwer, 1995.

[ØHB98] P. Øhstrøm, Per V. Hasle, and P. Braüner. Ockhamistic logics and true futures of counterfactual moments. *Proceedings of the Fifth International Workshop on Temporal Representation and Reasoning (TIME-98)*, 18, 1998. IEEE Press.

[Øhs81] P. Øhstrøm. Problems regarding the future operator in an indeterministic tense logic. *Danish Yearbook of Philosophy*, 18, 1981.

[Pri57] Arthur Prior. *Time and Modality*. Oxford UP, Oxford, 1957.

[Pri67] Arthur Prior. *Past, Present and Future*. Oxford UP, Oxford, 1967.

[Tho84] Richmond Thomason. Combination of tense and modality. In D Gabbay and G Gunthener, editors, *Handbook of Philosophical Logic*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984. réédition 2001.

[Zan96] Alberto Zanardo. Branching-time logic with quantification over branches : the point of view of modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 61(1), 1996.